Langage mathématique

Terminale, spécialité mathématique;2023–2024

1 C'est quoi les maths?

Faire des mathématiques ne se réduit certainement pas à l'application mécanique de recettes calculatoires (si l'école vous a donné l'impression inverse, c'est parce qu'il est nécessaire de savoir calculer pour faire des maths. Maintenant que vous êtes des experts en calculs, faisons des maths!).
Faire des mathématiques, c'est manipuler des objets, écrire à leur sujet des assertions dans un langage spécifique, et raisonner pour démontrer la véracité ou non d'une assertion.
En ce sens, **le résultat a peu d'importance en maths**, ce qui compte, c'est le raisonnement. **Raisonner** se fait dans un cadre très précis (**des objets, un langage**). Une deuxième condition nécessaire (la première étant l'expertise en calculs) pour faire des maths, c'est d'être **rigoureux** (c'est-à-dire respecter le cadre: les objets et le langage).
Faire des maths, c'est dur. Voici un extrait d'une conférence de Cédric Villani (lecture optionnelle): « Un premier fait doit nous étonner, ou plutôt devrait nous étonner, si nous n'y étions si habitués. Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent pas les mathématiques. »[1] La question semble naïve, mais le raisonnement est subtil : « Si les mathématiques n'invoquent que les règles de la logique, celles qui sont acceptées par tous les esprits bien faits ; si leur évidence est fondée sur des principes qui sont communs à tous les hommes et que nul ne saurait nier sans être fou, comment se fait-il qu'il y ait tant de personnes qui y soient totalement réfractaires ? » **Enchaîner des arguments logiques est difficile et demande des efforts, même si une démonstration mathématique est basée sur un enchaînement d'affirmations très simples**. C'est si vrai qu'apprendre à enchaîner des arguments logiques est le but essentiel de l'éducation mathématique, tout le reste est accessoire. Et c'est important parce que ce n'est ni facile ni naturel. Nous ne sommes pas biologiquement faits pour enchaîner plusieurs arguments logiques. Nous sommes plutôt faits pour raisonner spontanément en termes d'émotions, en termes d'analogie, en termes de sentiments, parce que c'est extrêmement efficace pour gérer une situation de danger : la peur est beaucoup plus efficace pour échapper au danger que l'évaluation logique des pourcentages de risque ! En outre, il y a des activités que nous avons été sélectionnés biologiquement pour savoir faire : on apprend à parler sans y penser, alors que pour beaucoup, apprendre à faire un raisonnement qui se tient est un obstacle extrêmement difficile, qui demandera beaucoup plus de temps et de patience que d'apprendre à parler. Pourtant, le simple fait de parler demande d'appliquer un grand nombre de règles de grammaire qui ne sont pas moins complexes que les règles que l'on utilise dans un raisonnement mathématique. Poincaré continue : « Comment l'erreur est-elle possible en mathématiques ? Une intelligence saine ne doit pas commettre de faute de logique, et cependant il y a des esprits très fins... qui sont incapables de suivre ou de répéter sans erreur les démonstrations des mathématiques ... Est-il nécessaire d'ajouter que les mathématiciens eux-mêmes ne sont pas infaillibles ? » On peut croire en effet que vérifier une démonstration est chose facile : il suffit simplement, après tout, d'examiner chaque argument et de le vérifier... Or, ce n'est pas si simple : pour vérifier une démonstration, il faut d'abord avoir une idée de son sens, l'avoir traduite sous forme d'un plan, d'une stratégie, et vérifier ensuite les détails.

1. Henri Poincaré, *La valeur de la science*

2 Le langage

2.1 Le matériau des mathématiques

Considérons dans un plan une droite et un point extérieur à cette droite. L'assertion « il existe une droite, et une seule, passant par le point et parallèle à la droite » semble vraie; à tel point qu'Euclide (IIIe avant J.-C.) en a fait un axiome (appelé le 5ème postulat d'Euclide).
Les mathématiciens ont beaucoup cherché (pendant 22 siècles tout de même ! Chercher, c'est l'activité première des mathématiques) à démontrer cette assertion à partir des 4 premiers postulats d'Euclide. En vain. Enfin, pas tout à fait. Euclide avait déjà démontré que son 5ème postulat était équivalent à l'assertion « la somme des angles d'un triangle est égale à l'angle plat ». Au XIXe, des mathématiciens ont construit des géométries cohérentes [2] dans lesquelles la somme des angles d'un triangle vaut moins que l'angle plat (Lobatchevski, 1829, géométrie hyperbolique) ou plus (Riemann, 1867, géométrie elliptique).
Ce cheminement historique montre qu'en toute rigueur, on ne devrait pas dire « telle assertion est vraie », mais « telle assertion est démontrable dans telle théorie ». Ce qu'est une théorie mathématique est difficile à définir [3]. Contentons-nous du fait qu'une théorie mathématique est constituée d'**objets spécifiques**, d'un **langage spécifique** permettant de démontrer des **assertions** grâce à certaines **règles de logique**.

2.2 Nature des objets mathématiques

① **Les ensembles**, qu'on peut définir de deux manières:

- soit en listant tous les objets qui sont dedans, on dit alors qu'on définit alors l'ensemble **par extension**, comme par exemple $E = \{0; 1; 2; 3; 4\}$;
- soit en donnant la propriété vérifiée par tous les objets qui sont dedans, par exemple l'ensemble E définie précédemment par extension peut se définir **par compréhension** ainsi:
  $E = \{n \in \mathbb{N};\ n \leqslant 4\}$
  Il n'y a **pas unicité de la définition par compréhension**, ainsi $E = \{n + 5;\ n \in \mathbb{N}\}$.

② **Les nombres** qu'on range dans des ensembles emboîtés: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

i) l'ensemble des nombres **entiers naturels**, noté $\mathbb{N}$ et qu'on pourrait tenter [4] de définir par extension: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$

ii) l'ensemble des nombres **entiers relatifs**, noté $\mathbb{Z}$ et qu'on peut (faussement) définir par extension par $\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.

iii) les ensembles finis de nombres entiers consécutifs comme par exemple $[\![3; 7]\!] = \{3; 4; 5; 6; 7\}$ (ensemble défini par extension, cette fois sans entourloupe)

iv) l'ensemble des **nombres rationnels**, noté $\mathbb{Q}$ (quotients de deux entiers relatifs, c'est-à-dire les fractions), qui se définit par compréhension: $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$.

---

2. Une théorie est cohérente si elle n'admet aucune contradiction. Une contradiction est une assertion dont on peut tout à la fois démontrer, à partir des axiomes de la théorie, qu'elle est vraie et qu'elle est fausse. De plus, on peut montrer que, s'il existe **une** assertion vraie et fausse dans une théorie, alors **toutes** les assertions sont vraies et fausses (une telle théorie, dite inconsistante, n'a donc aucun intérêt).

3. La formalisation des mathématiques est le sujet de la logique moderne, discipline née au début du XXe pour lever la crise qu'a provoquée RUSSELL avec son célèbre paradoxe (voir Remarque 8). Notons pour l'anecdote que la logique moderne est au départ une discipline totalement abstraite, mais qui a donné concrètement naissance aux ordinateurs. L'abstrait, ça peut être concret!

4. On ne peut en fait pas définir un ensemble par extension en utilisant le symbole « ... », ce serait triché! On ne peut définir $\mathbb{N}$ ni par extension, ni par compréhension, ce sont les axiomes de Peano qui définissent $\mathbb{N}$ en toute rigueur. Et dans cette axiomatique, un nombre donné est lui-même un ensemble. « L'ensemble vide existe » est un axiome et ensuite on définit par exemple le nombre 3 comme étant une caractéristique (un peu difficile à définir quand les nombres naturels n'existent pas encore) de l'ensemble $\left\{\emptyset; \{\emptyset\}; \{\emptyset; \{\emptyset\}\}\right\}$

Ceci peut se lire « l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{b}$ tels que a et b sont deux nombres entiers, b étant non nul. »

v) l'ensemble des **nombres décimaux**, noté $\mathbb{D}$, qui n'existe que parce qu'on a choisi la base 10 pour compter les entiers (on a 10 doigts) et qui se définit également par compréhension: $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{a}{10^p} \mid a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N} \right\}$.
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$, c'est-à-dire que tout entier n est un nombre décimal.
En effet il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $n = \dfrac{a}{10^p}$: il suffit de choisir $a = n$ et $p = 0$.

vi) l'ensemble des nombres **réels** $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Q}$ et les irrationnels comme $\pi, \mathrm{e}, \sqrt{2}, \ldots$.
La construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ est difficile.

vii) les **intervalles** comme $]3;7] = \{x \in \mathbb{R},\ 3 < x \leqslant 7\},\ [3;+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ 3 \leqslant x\}$.
Ce sont des ensembles définis par compréhension.
Ne pas confondre $\{0;1\}$ (*ensemble fini*) et $[0;1]$ (*ensemble infini*).

③ **Les objets géométriques** qui peuvent être:
- soit des ensembles de points, comme c'est le cas pour une courbe ou une surface (dans le plan ou dans l'espace);
- soit des vecteurs.

Il faut alors **respecter la notation mathématique** pour savoir de quel objet on parle: (AB) n'est pas AB ni $[AB]$ ni $[AB)$ ni $\overrightarrow{AB}$

④ **Les fonctions**, qui sont définies au lycée comme étant des « procédés » qui, à un nombre x dans un ensemble E (appelé **domaine de définition** de la fonction), associe un nombre appelé l'image de x et notée $f(x)$.
Ne pas confondre $\boldsymbol{f}$ qui est une fonction avec $\boldsymbol{f(x)}$ qui est un nombre (l'image de $\boldsymbol{x}$).

Notation 1: Si $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, on note:
$\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ (se lit « $\mathbb{K}$ privé de zéro »), et $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$, $\mathbb{R}_-^* =]-\infty;0[$, etc ...

2.3 Nature des assertions mathématiques

Une assertion est une phrase mathématique qui a une valeur de vérité (**elle est vraie ou fausse**).

① « $2 > 3$ » est une **assertion** mathématique, peu importe qu'elle soit fausse [5]. Pour qu'une phrase soit une assertion, il faut qu'elle parle d'**objets mathématiques**, et qu'elle en parle dans un **langage mathématique** correct.

② « Il pleut » est une assertion dont vous pouvez penser qu'elle est vraie ou fausse mais n'est pas une assertion mathématique [6]. La pluie n'est pas un objet mathématique.

③ n désignant un entier naturel, « n est un nombre premier » est une assertion mathématique qui dépend d'une variable. On a besoin d'attribuer une valeur à n pour savoir si l'assertion est vraie ou fausse. On parle alors plutôt de **prédicat** que d'assertion. On peut aussi parler d'une assertion libre par opposition à une assertion close.

Exemple 1: $\mathscr{P}(x)$: « $x^2 \geqslant x + 1$ » est un prédicat dépendant d'un nombre réel x. En spécifiant x, on obtient une assertion. Par exemple $\mathscr{P}(2)$ est une assertion vraie, alors que $\mathscr{P}(0)$ est fausse.

④ Dans un texte mathématique, on ne rencontre pas que des assertions ou des prédicats. Par exemple, la phrase « Soit n un nombre premier » est une phrase mathématique correcte, mais elle n'a aucune valeur de vérité. Elle sert simplement à informer le lecteur que désormais la lettre n désignera toujours le **même** nombre (ce n'est pas un nombre variable) et que ce **nombre fixé** est un nombre premier, **arbitrairement choisi** dans l'ensemble de tous les nombres premiers.

5. une assertion vraie s'appelle une **propriété** ou un **théorème** (selon son importance dans l'édifice mathématique).
6. pleut-il si la dernière goutte de pluie est tombée à 58 cm du locuteur et 29 s avant que le locuteur ne prononce la phrase ?

2.4 Quantificateurs et statut des variables

Définition 1: Quantificateur universel et quantificateur existentiel

$\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ signifie : « $\mathscr{P}(x)$ est vraie **pour chaque élément** x de l'ensemble E ».

$\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ signifie : « $\mathscr{P}(x)$ est vraie **pour au moins un élément** x de l'ensemble E ».

Exemple 2: Les assertions « $\forall x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 0$ » , « $\forall x \in \mathbb{Z},\ x \geqslant 0$ » , « $\exists x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0$ » sont-elles vraies ou fausses ?

Remarque 1: Dans une proposition telle que : « Pour tout x dans l'ensemble I, $f(x) \leqslant f(a)$ » (définition de « la fonction f admet un maximum sur I en a »), les variables a, I, f et x n'ont pas le même statut.
En effet, cette proposition « parle » des variables a, f et I (elle donne une propriété de ces objets), et au contraire, elle ne « parle » pas de la variable x. On dit que **les variables a, f et I sont parlantes** (ou libres) et que **la variable x est muette** (ou liée).
Pour déterminer si une lettre désigne une variable muette, il existe un test simple: si en changeant la lettre en une autre lettre (disponible), la phrase garde le même sens, alors cette lettre désigne une variable muette.

Exemple 3: Dans les phrases suivantes, les variables rencontrées sont-elle libres ou muettes? Les phrases sont-elles des assertions, des prédicats ou ni l'un ni l'autre?

① l'équation $4x^2 - x - 1 = 0$ ② $f:\ x \mapsto 4x^2 - x - 1$ ③ le nombre $f(x) = 4x^2 - x - 1$

④ $\{x \in \mathbb{R} \mid 4x^2 - x - 1 = 0\}$ ⑤ $\lim\limits_{n \to +\infty} ne^{-n}$ ⑥ $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

⑦ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Remarque 2 (ordre des quantificateurs): Les quantificateurs identiques commutent.
Par exemple, $\big(\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ \mathscr{P}(x,y)\big) \iff \big(\forall y \in F,\ \forall x \in E, \mathscr{P}(x,y)\big)$.
On ne peut en général pas intervertir l'ordre de deux quantificateurs différents.

Exemple 4: Dire si ces assertions sont vraies ou fausses :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x < y$ et $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x < y$.

2.5 langage mathématique et langage naturel

Nous ne pouvons utiliser le langage mathématique qu'en nous servant aussi du langage naturel (pour nous, le français), sans quoi le formalisme mathématique deviendrait trop abscons (autant que ce dernier mot ?). Il est donc indispensable pour faire des mathématiques d'avoir une maîtrise suffisante de la langue naturelle.
Rédiger des mathématiques impose de respecter la syntaxe de la langue française, faire des phrases complètes, organiser son texte de façon cohérente.
Souvent il faut traduire une assertion du langage mathématique vers le langage naturel, ou traduire dans l'autre sens.
Par exemple, la conjecture[7] de Goldbach en langage naturelle s'énonce ainsi:
Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

7. Une **conjecture** est une assertion dont on n'a pas démontré la valeur de vérité et qu'on pense vraie. Contrairement à une **propriété** ou à un **théorème** qui sont des assertions dont on a démontré qu'elles sont vraies.

En langage mathématique[8], cela donne :
$\forall n \in N, (n > 3 \text{ et } \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k) \implies \exists p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, p \text{ et } q \text{ nombres premiers}, \text{ et } n = p + q$

2.6 Connecteurs logiques

Les **connecteurs logiques** permettent de créer **une nouvelle assertion à partir d'une ou plusieurs assertions**.
On les définit dans des **tables de vérité qui donnent la valeur de vérité de l'assertion composée dans tous les cas possibles:**

Définition 2: Connecteurs logiques

Soit A et B deux assertions. On définit les assertions: **non A**, **A et B**, **A ou B**, **A $\implies$ B**, **A $\iff$ B** de la manière suivante:

A	**non A**
V	F
F	V

A	B	**A et B**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	**A ou B**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	B	**A $\implies$ B**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A	B	**A $\iff$ B**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarque 3: le « ou » mathématique est **inclusif**, il est vrai lorsque exactement l'un des prédicats qui le compose est vrai, mais aussi lorsque les deux sont vrais. Il ne faut pas le confondre avec le « ou » **exclusif**, qui marque l'alternative (par exemple sur la carte d'un menu au restaurant, « fromage ou dessert »).

Remarque 4: La négation « échange » les quantificateurs :
$\left(\text{ non } \left(\forall x \in E,\ A(x)\right)\right) \iff \left(\exists x \in E,\ \text{ non } \left(A(x)\right)\right)$
$\left(\text{ non } \left(\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x)\right)\right) \iff \left(\forall x \in E,\ \text{ non } \left(\mathscr{P}(x)\right)\right)$

Exemple 5: Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire avec de quantificateurs les expressions, puis les nier:
① f ne s'annule jamais. ② f n'est pas positive. ③ f est majorée par 5.

Propriété 1: Distributivité, Lois de Morgan, Contraposée, Double implication

Soit A, B et C trois assertions. Alors les connecteurs vérifient :

① **Distributivité :** A et (B ou C) $\iff$ ((A et B) ou (A et C))
A ou (B et C) $\iff$ ((A ou B) et (A ou C))

② **Lois de *Morgan* :** non (A ou B) $\iff$ non (A) et non (B)
non (A et B) $\iff$ non (A) ou non (B)

③ **Contraposée** : (A $\implies$ B) $\iff$ (non (B) $\implies$ non (A))

④ **Double implication** : (A $\iff$ B) $\iff$ $\left((A \implies B) \text{ et } (B \implies A)\right)$

8. on peut écrire la phrase en langage entièrement mathématique, où il ne subsiste plus aucun mot du langage naturel comme « et » ou « nombres premiers », mais c'est dur à lire (le « et » s'écrit $\wedge$ et le « ou » s'écrit $\vee$):
$\forall n \in \mathbb{N}((n > 3 \wedge \exists k \in \mathbb{N}, n = 2 \times k) \implies \exists p \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N}, (p > 1 \wedge q > 1 \wedge \forall x \in \mathbb{N}$
$(\exists u \in \mathbb{N}(u \times x = p) \implies (x = 1 \vee x = p)) \wedge \forall y \in \mathbb{N}(\exists v \in \mathbb{N}(v \times y = q) \implies (y = 1 \vee y = q)) \wedge n = p + q))$.

Preuve 1: On montre par exemple (non (A ou B)) $\Longleftrightarrow$ (non (A) et non (B)) en dressant les tables de vérité de chacune des deux assertions et en constatant que ce sont les mêmes, donc elles sont bien équivalentes:

A	B	A ou B	non (A ou B)
V	V	V	**F**
V	F	V	**F**
F	V	V	**F**
F	F	F	**V**

A	B	non B	non A	(non A) et (non B)
V	V	F	F	**F**
V	F	V	F	**F**
F	V	F	V	**F**
F	F	V	V	**V**

2.6.1 Le connecteur $\Longrightarrow$ appelé implication, et le connecteur $\Longleftrightarrow$ appelé équivalence

L'implication et l'équivalence sont à la base de tout raisonnement mathématique.
Il arrive souvent de lire « $A \Longrightarrow B$ » comme « si A est vrai alors B est vrai », voire « A est vrai donc B est vrai ».
Quand, petit, on est énervé de s'entendre dire « si tu manges ta soupe alors tu auras du dessert »[9], on comprend bien la causalité entre le courage de devoir finir cette soupe immonde et le plaisir de se bâfrer de mousse au chocolat. Et plus grand, on pense naturellement qu'implication et causalité sont la même chose, puisqu'on les lit de la même manière avec un « si ... alors ... » ou un « donc ».
Mais, attention, **implication n'est pas causalité**. Par exemple, « je suis immortel $\Longrightarrow$ la Terre est plate » est une assertion vraie[10]. Elle est vraie car son hypothèse (je suis immortel) est fausse, et en consultant la table de vérité qui définit l'implication, je constate qu'une implication est vraie dès lors que son hypothèse est fausse (c'est dans la définition de l'implication, il faut le prendre tel quel). Cette implication est vraie, et on voit bien qu'il n'y a aucun lien de causalité entre l'hypothèse et la conclusion de cette implication.
Il est également possible qu'une implication soit vraie, que son hypothèse soit vraie, et que l'implication ne traduise toujours aucun lien de causalité comme par exemple l'implication vraie suivante :
$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$
Cela dit, on lit néanmoins $A \Longrightarrow B$ de la manière suivante:

- « A implique B » ou « A entraîne B » ou « B est conséquence de A »
- « si on a A (si A est vrai), alors on a B (B est vrai) »
- « pour qu'on ait A, il faut (il est nécessaire) qu'on ait B »
- « B est une **condition nécessaire** pour A »
- « pour qu'on ait B, il suffit (il est suffisant) d'avoir A »
- « A est une **condition suffisante** pour B »

Enfin, on lit $A \Longleftrightarrow B$ de la manière suivante:

- « A équivaut B » ou « on a A si, et seulement si, on a B »
- « A est une **condition nécessaire et suffisante** pour B »

C'est-à-dire que l'équivalence est une double implication: $\Big(A \Longleftrightarrow B\Big) \Longleftrightarrow \Big(A \Longrightarrow B \text{ et } B \Longrightarrow A\Big)$

9. si l'enfant pouvait être un génie de logique, il pourrait arguer que la phrase « si tu manges ta soupe alors tu auras du dessert » ne dit absolument rien du cas où il ne mange pas sa soupe, et par conséquent il est libre de choisir de ne pas manger sa soupe **et** d'avoir du dessert sans contredire la phrase de son parent

10. ce n'est pas une assertion mathématique puisqu'elle ne parle pas d'objets mathématiques. C'est un exemple pour essayer de comprendre.

Exemple 6: Dire quel type de condition est A pour B (nécessaire ou suffisante ou les deux?):

① A : « $x \leqslant -3$ » et B : « $x^2 \geqslant 4$ »

② A : « f est la fonction exponentielle » et B : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée »

③ A : « la fonction $x \mapsto ax$ est croissante sur $\mathbb{R}$ » et B: « $a > 0$ ».

Exemple 7: Dire ensuite si ces propositions, ainsi que leurs réciproques, sont vraies:

① Pour que le produit de deux réels soit positif, il suffit que ces réels Soit positifs.

② Pour que $x = 2$, il faut que $x^2 = 4$.

Exemple 8: Les assertions:

① $A \implies A$; ② A ou (non A); ③ (A et B) $\implies$ A ; ④ A $\implies$ (A ou B) ;

⑤ $\big((A \implies B) \text{ et } (B \implies C)\big) \implies (A \implies C)$.

sont des **tautologies** car elles sont vraies quelque soient les valeurs de vérité de A, B et C.

Construire la table de vérité de $\big((A \implies B) \text{ ou } (B \implies A)\big)$. Est-ce une tautologie?

2.7 Opérations sur les ensembles

Soit E un ensemble.
Écrire $x \in E$ signifie que l'objet x est un élément de l'ensemble E. Par exemple, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$. Et pour écrire non$(x \in E)$, on écrit $x \notin E$), par exemple $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Définition 3: inclusion, appartenance, réunion, intersection, complémentaire

Soit A, B et Ω trois ensembles.

① Lorsque $x \in A \implies x \in B$, on dit que A est **inclus** dans B, ou que A est une partie de B, ce que l'on note $A \subset B$.

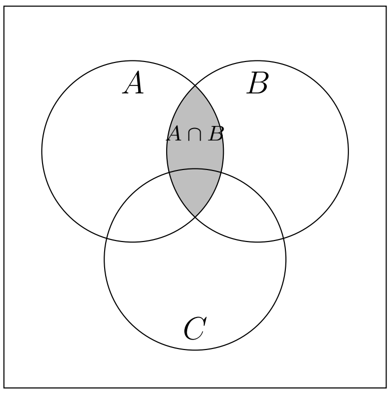
② L'ensemble des parties de l'ensemble B se note $\mathcal{P}(B)$. On a $A \in \mathcal{P}(B) \iff A \subset B$.

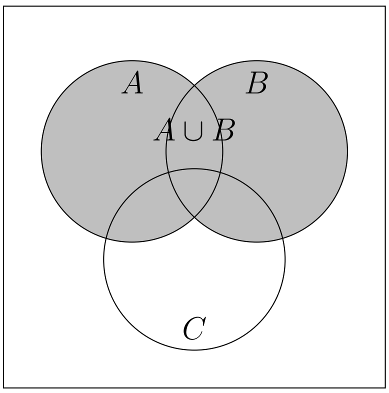
③ L'intersection de A et B est l'ensemble défini par $x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$.

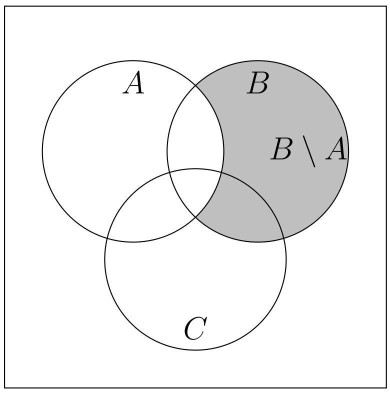
④ La réunion de A et B est l'ensemble défini par $x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$.

⑤ L'ensemble A privé de B est défini par $x \in A \setminus B \iff (x \in A \text{ et } x \notin B)$.

⑥ Si $A \subset \Omega$, le complémentaire de A dans Ω est $\complement_\Omega A = \Omega \setminus A$. On le notera $\overline{A}$ en probabilité lorsque Ω correspond à l'univers sur lequel on travaille.







Remarque 5: On a les inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Remarque 6: Ces opérations ont des propriétés héritées des connecteurs logiques qui servent à les définir. Par exemple, on a $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ qui vient de la distributivité de « et » par rapport à « ou ».

Exemple 9: Soit A et B deux parties d'un ensemble Ω. Comparer les ensembles suivants :
$\overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap A$, $\overline{A} \cup A$, $\emptyset$, Ω.

Remarque 7 (lecture optionnelle): $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ est une assertion vraie (tout élément de $\mathbb{Z}$ est bien un élément de $\mathbb{Q}$), et $\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}$ est une assertion fausse ($\mathbb{Z}$ n'est pas un élément de $\mathbb{Q}$).
Pour tout ensemble E, on convient $\emptyset \subset E$ et on a (sans convenir) $E \subset E$, ce qui s'écrit aussi d'après la définition 3 point 2 : $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.
On vient d'écrire: « Pour tout ensemble E, on a $\emptyset \subset E$ », l'assertion est donc vraie en particulier pour $E = \emptyset$ et cela donne: $\emptyset \subset \emptyset$, c'est-à-dire que l'ensemble vide est une partie de l'ensemble vide [a], donc l'ensemble des parties de l'ensemble vide est non vide (en langage mathématique: $\mathcal{P}(\emptyset) \neq \emptyset$), ou plus précisément $\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$, ou encore plus précisément $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
Pour bien comprendre la différence entre appartenance et inclusion, prenons l'exemple $E = \{7\}$.
L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de cet ensemble à un élément contient deux éléments.
Plus précisément: $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{7\}\}$.
Observons que $7 \in E$ mais $7 \not\subset E$ (équivalent à $7 \notin \mathcal{P}(E)$) et que $\{7\} \notin E$ mais $\{7\} \subset E$ (équivalent à $\{7\} \in \mathcal{P}(E)$).
Si on veut se faire des nœuds au cerveau, on peut ensuite se demander ce qu'est $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ [b].

a. mais bien sûr l'ensemble vide n'est pas un élément de l'ensemble vide, c'est-à-dire que l'assertion $\emptyset \in \emptyset$ est une assertion fausse ou encore $\emptyset \notin \emptyset$ est une assertion vraie. Mais $\emptyset \subset \emptyset$ est une assertion vraie.
L'appartenance n'est pas l'inclusion.

b. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \Big\{\emptyset; \{\emptyset\}; \{7\}; \Big\{\emptyset; \{7\}\Big\}\Big\}$

Remarque 8 (lecture optionnelle): Russell casse la baraque !
Pour un certain élément x et un certain ensemble E, il est possible d'avoir tout à la fois $x \in E$ et $x \subset E$. Par exemple, si $E = \{3; \{3\}\}$, alors $x = \{3\}$ vérifie $x \in E$ et $x \subset E$ ($x = 3$ vérifie l'appartenance mais pas l'inclusion).
Russell a démontré que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas. Il est parti du fait que si cet ensemble existe (appelons-le Ω), alors il vérifie l'assertion étrange suivante: $\Omega \in \Omega$ (l'ensemble de tous les ensembles est **un** ensemble, donc il appartient bien à l'ensemble de **tous** les ensembles). Il démontre ensuite par l'absurde qu'un tel ensemble ne peut exister. Pour cela, il considère l'ensemble P défini par compréhension de la manière suivante: $P = \{A \in \Omega \mid A \notin A\}$ et on observe que ($P \in P \implies P \notin P$) et ($P \notin P \implies P \in P$), ce qui est effectivement absurde. La théorie moderne des mathématiques, qui s'est en grande partie construite pour se débarrasser du paradoxe de Russell, a fait en sorte qu'aucun ensemble n'est élément de lui-même (mais bien sûr tout ensemble est inclus dans lui-même), c'est-à-dire:
Pour tout ensemble E, on a $E \notin E$ et $E \subset E$.